Programme semaine 15

Intégration 1/2

1 Intégrales convergentes

Convergence/divergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ où f est continue par morceaux sur un intervalle de bornes $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

Valeur de l'intégrale en cas de convergence.

Compatibilité avec l'intégrale définie en première année dans le cas où I est un segment.

Exemples de référence (où $\alpha \in \mathbb{R}$) :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \qquad \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \qquad \int_0^1 \ln t \, dt \qquad \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}.$$

Premières propriétés : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.

Changement de variable : si $\varphi :]\alpha;\beta[\to]a;b[$ bijection $\mathscr{C}^1$ strictement croissante et $f :]a;b[\to \mathbb{C}$ continue alors les intégrales $\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\varphi'(u)du$ et $\int_a^b f(t)dt$ sont de même nature, et si elles sont convergentes elles sont égales.

Idem en échangeant les bornes si φ strictement décroissante.

Inutile de justifier les changements de variables simples (fonctions affines, puissances, exponentielles, logarithme).

Intégration par parties : si f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a;b[$ et telles que le produit fg admette en a et b une limite finie, alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)dt$ sont de même nature, et si elles sont convergentes, on a : $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)dt = \Big[f(t)g(t)\Big]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt$

2 Intégrales absolument convergentes

Lorsque l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$ est convergente, on dit que f est intégrable, et que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente.

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est alors convergente.

Si f est intégrable sur un intervalle I, alors : $\displaystyle\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|$

Utilisation des relations de comparaison entre fonctions pour montrer l'intégrabilité d'une fonction.

Si f est *continue*, positive et intégrable sur I alors

$$\int_I f = 0 \iff f = 0.$$

3 Intégration des relations de comparaison

Intégration des relations de domination, de négligeabilité et d'équivalence.
La fonction de référence est positive.

4 Comparaison série-intégrale

Théorème de comparaison série-intégrale :
Si $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux, positive et décroissante, alors la série $\sum_n f(n)$ est convergente si et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.

Techniques de comparaison série-intégrale :
Savoir encadrer une somme (finie ou infinie : somme partielle de série, reste de série convergente...) par deux intégrales, notamment en vue d'obtenir un équivalent de la somme.

5 Théorème de convergence dominée

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On pose $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{C}_m^0(I,K)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux.
Soient $f : I \longrightarrow K$ et $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues par morceaux.
On suppose :

$$\begin{cases} (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement vers } f \text{ sur } I \\ \left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in I,\ \ |f_n(t)| \leqslant \varphi(t) \\ \varphi \text{ est intégrable sur } I \end{array}\right] \text{ « hypothèse de domination »} \end{cases}$$

Alors les fonctions f et f_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ sont intégrables sur I et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f.$$

Extension au cas d'une famille à paramètre réel $(f_\lambda)_{\lambda\in J}$ où J est un intervalle de R.

6 Remarque

Se souvenir aussi des théorèmes et techniques de première année, par exemple :
- calculs de primitives
- formule de Taylor avec reste intégral
- sommes de Riemann (elles convergent vers l'intégrale de la fonction).

7 Exercices

Exercices de la banque CCP *à préparer* : 56, 28, 5, 25, 26