PROGRAMME SEMAINE 19

Espaces préhilbertiens

NB : Les endomorphismes symétriques et le théorème spectral seront au programme de la semaine 20.

1 Produit scalaire, norme associée

• Produit scalaire

Produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-ev, espace préhilbertien réel, espace euclidien.

Exemples à connaître :

— produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

— produit scalaire sur l'espace des fonctions continues sur un segment donné.

— produit scalaire sur l'espace des fonctions de carré intégrable sur un intervalle donné.

— produit scalaire sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

• Norme associée à un produit scalaire

Inégalités de Cauchy-Schwarz, de Minkowski, norme associée à un produit scalaire, identité du parallélogramme, identités de polarisation.

2 Orthogonalité, BON

•Vecteurs orthogonaux, vecteurs unitaires, BON

Vecteur unitaire, famille orthogonale / orthonormale, théorème de Pythagore.

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. BON.

•Calculs dans une BON

Coordonnées, produit scalaire, norme, matrice d'un endomorphisme dans une BON.

•Sous-espaces vectoriels orthogonaux

Vecteurs orthogonaux.

Sous-espaces vectoriels orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace vectoriel.

•Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

Si E préhilbertien et F ssev de E de dimension finie, alors $E = F \oplus F^{\perp}$;

projection orthogonale sur F : expression dans le cas où F est muni d'une BON.

•Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel

Définition. Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie, la distance de x à F est la distance de x à son projeté orthogonal sur F.

Inégalité de Bessel.

•Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

L'algorithme.

Tout espace préhilbertien de dimension finie admet une BON.

•Formes linéaires et produit scalaire

Isomorphisme canonique entre E et son dual E^*.

Vecteur normal à un hyperplan.

3 Suites orthonormales de vecteurs

Suite totale de vecteurs d'un espace préhilbertien E : le sous-espace vectoriel qu'elle engendre est dense dans E.

Si $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite totale d'éléments de E, alors on a, en notant p_n le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}(e_0,\dots,e_n)$:

$$\forall x \in E, \quad \lim_{n\to+\infty} p_n(x) = x.$$

En particulier, si $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale totale :

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle e_k | x\rangle e_k.$$

4 Automorphismes orthogonaux

Dans toute la suite, on ne considère plus que des espaces euclidiens.

Groupe orthogonal $O(E)$.

Exemples : les symétries orthogonales, les réflexions (mais pas les projecteurs orthogonaux). Ce sont les endomorphismes qui conservent les BON.

Stabilité de l'orthogonal d'un ssev stable par un automorphisme orthogonal.

Caractérisation par leur matrice dans une BON, groupe orthogonal $O(n)$.

Les matrices orthogonales sont les matrices de passage d'une BON à une BON.

Déterminant d'un automorphisme orthogonal.

Groupes spéciaux orthogonaux $SO(E)$ et $SO(n)$.

Réduction d'un automorphisme orthogonal dans une BON.

Cas des isométries vectorielles directes d'un espace euclidien de dimension 3 : les « rotations ».

Rappels de première année : description des matrices orthogonales de taille 2, isométries d'un plan euclidien orienté.

Exercices de la banque CCP *à préparer* : 39, 76, 77, 78, 79, 80